

Implementasi Diagram Kontrol *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM) untuk Pengendalian Proses Pembuatan *Turning Pin Aluminium*

Iqbal Fadhillah*, Suwanda

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*iqbalfadhillah434@gmail.com, idris1000358@gmail.com

Abstract. In statistics, one of the tools that can be used in process control is the control diagram. A control diagram is a graph that gives an idea of the behavior of a process. On the control diagram can detect any changes in the process that may affect the quality of the product. Product quality characteristics measured numerically or numerically are called variables. If there are more than two quality characteristics, simultaneous control of the related variables is required using a multivariate control diagram. The multivariate Shewhart control diagram (T2-Hotelling) is a frequently used multivariate control diagram. This control diagram will quickly detect if there is a large shift from the average vector of the process. Multivariate control diagrams that can quickly detect small average vector shifts include the multivariate cumulative sum control diagram (MCUSUM). There are some MCUSUM statistics. In this thesis, we will discuss MCUSUM statistics made by Healy and Crosiers, namely SH and SC. Application to control the aluminum turning pin manufacturing process with five quality characteristics shows an uncontrolled process with an out of control signal given in the 4th period by the MCUSUM SH control diagram, while according to MCUSUM SC it was detected in the 5th period, and for the application of the control graph T2 Hotelling was detected in the observation period 6.

Keywords: *Control Chart, MCUSUM, Shewhart, Turning*

Abstrak. Dalam statistika, salah satu alat yang dapat digunakan dalam pengendalian proses adalah diagram kontrol. Diagram kontrol adalah sebuah grafik yang memberi gambaran tentang perilaku sebuah proses. Pada diagram kontrol dapat mendeteksi setiap perubahan dalam proses yang dapat mempengaruhi kualitas produk. Karakteristik kualitas produk yang diukur secara numerik atau angka disebut variabel. Jika terdapat lebih dari dua buah karakteristik mutu, pengendalian secara simultan terhadap variabel-variabel terkait tersebut diperlukan dengan menggunakan diagram kontrol multivariat. Diagram kontrol Shewhart multivariat (T2-Hotelling) adalah diagram kontrol multivariat yang sering digunakan. Diagram kontrol ini akan cepat mendeteksi jika terjadi pergeseran besar dari vektor rata-rata proses. Diagram kontrol multivariat yang dapat dengan cepat mendeteksi pergeseran vektor rata-rata yang kecil salah satunya adalah diagram kontrol multivariate cumulative sum (MCUSUM). Terdapat beberapa statistik MCUSUM. Dalam skripsi ini akan dibahas statistik MCUSUM yang dibuat oleh Healy dan Crosier yaitu SH dan SC. Aplikasi pada pengontrolan proses pembuatan turning pin aluminium dengan lima karakteristik mutu menunjukkan proses tidak terkendali dengan sinyal out of control diberikan pada periode ke-4 oleh diagram kontrol MCUSUM SH, sedangkan menurut MCUSUM SC terdeteksi pada periode ke-5, dan untuk penerapan grafik pengendali T2 Hotelling terdeteksi pada pengamatan periode 6.

Kata Kunci: *Diagram kontrol, MCUSUM, Shewhart, Turning*

A. Pendahuluan

Kegiatan perbaikan mutu produk, baik itu pada industri manufaktur maupun jasa adalah sebuah keharusan. Salah satu kegiatan perbaikan mutu produk adalah pengendalian proses statistik (PPS). Tujuan PPS adalah agar variasi produk tidak terjadi, yaitu variasi akibat adanya gangguan pada salah satu komponen produksi (metode, material, mesin dan manusia). Terdapat 7 alat yang dapat digunakan dalam kegiatan PPS, di mana diagram kontrol termasuk di dalamnya (Montgomery, 2009). Diagram kontrol adalah sebuah grafik yang memberi gambaran tentang perilaku sebuah proses. Oleh karena itu diagram kontrol dapat digunakan untuk mendeteksi setiap perubahan dalam proses menurut karakteristik kualitas. Terdapat dua macam diagram kontrol berdasarkan banyaknya karakteristik, yakni diagram kontrol univariat dan multivariat.

Ada banyak diagram kontrol multivariat yang secara garis besar dibagi ke dalam tiga jenis yaitu diagram kontrol Shewhart multivariat (T2-Hotelling), diagram kontrol Multivariate cumulative sum (MCUSUM). Diagram kontrol MCUSUM, merupakan metode alternatif yang telah dikembangkan untuk mengatasi kelemahan diagram kontrol Shewhart multivariat yaitu kurang peka dalam mendeteksi pergeseran kecil dari nilai parameter proses. Dalam perkembangannya, terdapat beberapa statistic Multivariate Cumulative Sum (MCUSUM), seperti yang diusulkan Healy (1987), Crosier (1988), dan Pignatiello dan Runger (1990)

Pembuatan turning (bubut) adalah proses pemesinan dimana menggunakan satu alat berupa pahat untuk membuang sebagian material dari permukaan benda kerja dalam bentuk geram (chip) melalui perputaran dari benda kerja silinder (Groover, 2010). Bubut pada umumnya digunakan untuk pengerjaan benda-benda yang berbentuk silinder. Salah satu contoh barang yang dapat dibuat menggunakan mesin bubut yaitu pin aluminium yang berfungsi untuk konektor kabel listrik ke metering

B. Metodologi Penelitian

Disribusi Normal Multivariat

Analisis multivariat merupakan suatu analisis dengan lebih dari dua variable acak. Dalam analisis multivariat umumnya mengasumsikan bahwa populasi atau variabel-variabel acak yang sedang dikaji diasumsikan berdistribusi normal multivariat (Johnson dan Wichern, 2007).

Diagram Kontrol

Diagram kontrol merupakan salah satu alat untuk melakukan pengendalian kualitas (Montgomery, 2009). Diagram kontrol dapat melihat suatu proses terkendali atau tidak terkendali dilihat dari titik-titik dalam grafik. Keadaan terkendali apabila titik-titik berada diantara batas kendali. Keadaan dapat dikatakan tidak terkendali apabila titik-titik berada diluar batas kendali atau menunjukkan pola yang tidak acak. Batas kendali yang dimaksud yaitu Batas Kontrol Atas (BKA), Garis Pusat (GP), dan Batas Kontrol Bawah (BKB). Apabila ada titik yang berada diluar batas kendali atau keadaan tidak terkendali, maka diperlukan melakukan tindakan penyelidikan lebih lanjut untuk mengetahui dan menghilangkan penyebab proses tidak terkendali tersebut.

Diagram Kontrol Shewhart Individu

Misalkan sebuah proses dapat digambarkan oleh karakteristik mutu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dimana μ merupakan rata-rata proses dan σ^2 merupakan varians proses. Dalam keadaan *in kontrol* $\mu = \mu_0$, sedangkan dalam keadaan *Out of kontrol* $\mu = \mu_1$. Untuk mengendalikan rata-rata proses ambil sampel selama m periode masing-masing berukuran $n=1$, yaitu $X_1, X_2, \dots, X_m$. Nilai-nilainya akan dipetakan ke dalam diagram kontrol Shewhart.

Berikut ini adalah rumus batas-batas kendali untuk diagram kendali *Shewhart* :

$$\begin{aligned} BKA &= E(X) + k\sqrt{Var(X)} \\ GP &= E(X) \\ BKB &= E(X) + k\sqrt{Var(X)} \end{aligned}$$

dimana k merupakan konstanta yang menentukan besarnya probabilitas menerima proses. Umumnya nilai $k = 3$ yang bersesuaian dengan $\alpha = 0.0027$ dan diagram kontrolnya disebut diagram kontrol 3 sigma.

ARL Shewhart

Kriteria yang digunakan untuk dapat membandingkan kinerja diagram kontrol adalah dengan mengukur seberapa cepat diagram kontrol tersebut membangkitkan sinyal *out of kontrol*. Diagram kontrol yang lebih cepat mendeteksi sinyal *out of kontrol* disebut lebih sensitif terhadap perubahan proses. Salah satu cara untuk mengukur kinerja diagram kontrol adalah dengan menggunakan *Average Run Length* (ARL) (Fadilah & Kudus, 2023). ARL adalah rata-rata run (observasi) yang harus dilakukan sampai ditemukannya *out of kontrol* yang pertama (Champ, dan Woodal, 1987). Apabila proses dalam keadaan in kontrol maka digunakan notasi ARL_0 dan dalam keadaan out of kontrol digunakan notasi ARL_1 . Dengan demikian ARL_0 diharapkan akan bernilai besar dan ARL_1 akan bernilai kecil ketika proses dalam keadaan *out of kontrol*. Secara umum persamaan untuk perhitungan nilai 3σ ARL adalah: $ARL = \frac{1}{p}$ dengan p = probabilitas suatu titik keluar dari batas-batas bagan kontrol.

Diagram Kontrol CUSUM Individu

Diagram kontrol CUSUM pertama kali diteliti oleh Page pada tahun 1954 (Montgomery, 2009). Diagram kontrol CUSUM lebih efisien digunakan untuk mendeteksi pergeseran kecil pada rata-rata atau varians dalam proses, yang disebabkan adanya penyebab khusus. Ada dua cara untuk merepresentasikan CUSUM, yaitu tabular CUSUM dan V-mask CUSUM. Dalam penelitian ini hanya akan dibahas mengenai representasi CUSUM dalam bentuk tabular CUSUM untuk pergeseran pada rata-rata.

Diagram Kontrol CUSUM Tabular untuk Rata-rata

Misalkan X_i adalah variabel acak proses yang berdistribusi Normal, dengan rata-rata ketika proses in kontrol μ_0 proses *out of kontrol* μ_1 dan varians σ^2 . Untuk mengontrol μ_0 , diambil sampel $x_1, x_2, \dots, x_m$ yang dikumpulkan selama m periode. Parameter μ_0 akan dikontrol oleh statistik CUSUM yang di definisikan sebagai berikut.

$$C_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu_0), i = 1, 2, \dots, m$$

Kemudian didefinisikan statistik C_t^+ dan C_t^- sebagai berikut: (Koshti, 2011)

$$C_i^+ = \max[0, x_t - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 + K) - x_t + C_{i-1}^-]$$

dimana

$$C_i^+ = C_i^- = 0,$$

$K = k\sigma$ = nilai referensi,

$$k = \frac{\delta}{2}$$

$$\delta = |\mu_1 - \mu_0|$$

Jika salah satu C_i^+ atau $C_i^- > H$, maka proses dikatakan *out of kontrol*. Dalam hal ini, Montgomery, (2009) merekomendasikan nilai H sebesar 4σ atau 5σ yaitu 4 atau 5 kali dari nilai standar deviasi prosesnya. Maka, batas-batas kontrol CUSUM tabular adalah:

$$\begin{aligned} BKA &= H \\ BKB &= 0 \end{aligned}$$

ARL CUSUM

Untuk diagram kontrol CUSUM ini, (Montgomery, 2009) merekomendasikan perkiraan nilai ARL yang diberikan oleh Siegmund (1985) karena kemudahannya. Untuk CUSUM satu ujung dengan parameter h dan k , dimana h dipilih 4-5 dan $k = 0.5$ maka Siegmund memperkirakan ARL nya sebagai berikut:

$$ARL = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$$

Untuk CUSUM satu ujung atas $(C_i^+)\Delta = \delta^* - k$ dan untuk CUSUM satu ujung bawah $(C_i^-)\Delta = -\delta^* - k$ dengan $\delta^* = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma}$ dan $b = h + 1,116$. Sedangkan untuk ARL CUSUM dua ujung, Siegmund memperkirakan ARL nya sebagai berikut:

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^-} + \frac{1}{ARL^+}$$

Diagram Kontrol T² Hotelling

Pada diagram kontrol T² Hotelling digunakan untuk melihat proses terkendali secara statistik atau tidak untuk karakteristik multivariat. Pengontrolan dapat dilakukan dengan menggunakan jarak Mahalanobis di antara vektor pengamatan period ke- i dengan vektor rata-rata target in kontrol yang didefinisikan sebagai berikut :

$$T_i^2 = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})$$

Batas-batas kontrol pada probabilitas menolak proses α adalah :

$$\begin{aligned} BKA &= \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}} \\ BKB &= 0 \end{aligned}$$

Diagram Kontrol MCUSUM

Pada diagram kontrol MCUSUM digunakan untuk melihat proses terkendali secara statistik atau tidak untuk karakteristik multivariate. Ada 2 diagram kontrol MCUSUM, yaitu menurut Healy (1987) dan Crosier (1988) Untuk prosedur CUSUM multivariat Healy, sinyal di luar kendali terjadi ketika statistik CUSUM melebihi nilai skalar keputusan H . Pilihan nilai untuk H dapat ditemukan dari simulasi.

Statistik pertama dari MCUSUM di sampel i untuk mendeteksi pergeseran dalam vektor rata-rata μ_0 menuju μ_1 adalah (Healy, 1987) :

$$SH_i = \max[(SH_{i-1} + \mathbf{a}^t (\mathbf{X}_i - \mu_0) - 0.5D), 0]$$

di mana $\mathbf{a}^t = [(\mu_1 - \mu_0)^t \mathbf{S}^{-1}] / D$ dan D adalah parameter noncentrality yang didefinisikan sebagai akar jarak Mahalanobis antara μ_1 dan μ_0 .

$$\hat{D} = \sqrt{(\mu_1 - \mu_0)^t \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mu_1 - \mu_0)}$$

Batas-batas kontrolnya adalah :

$$BKA = H$$

$$BKB = 0$$

Crosier (1988) mengusulkan dua skema untuk CUSUM multivariat. Salah satunya disebut CUSUM dari T (COT). COT dibentuk berdasarkan pada akar kuadrat dari statistik Shewhart multivariat (T^2 -Hotelling), yaitu :

$$SC1_i = \max[(S_{i-1} + T - k), 0]$$

dimana $S_0 > 0$, $k > 0$ dan $T_i = [(x_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (x_i - \mu_0)]^{\frac{1}{2}}$.

Batas-batas kontrolnya adalah :

$$BKA = H$$

$$BKB = 0$$

Nilai H ditentukan dengan cara simulasi untuk $ARL_0=200$ (Nidsunkid dkk, 2018), hasilnya sebagai berikut :

Tabel 1. Tabel nilai H untuk $ARL_0=200$

p	k		
	0,5	1	1,5
2	5,49	3,01	1,93
3	6,88	3,77	2,42
5	9,38	5,2	3,36

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Ringkasan Data

Data yang digunakan yaitu data diameter dan panjang proses dalam Pembuatan Turning pin Aluminium. Data yang digunakan pada penelitian ini dideskripsikan berdasarkan nilai rata-rata, nilai ragam, nilai minimum, dan nilai maksimum. Hasil pengujian dijelaskan pada tabel 2.

Tabel 2. Deskripsi Data Penelitian

Variabel	Rata-Rata	Varians	Minimum	Maksimum
X1	9,995	0,000127	9,96	10,01
X2	9,99	0,000129	9,95	10,01
X3	14,99	0,000131	14,95	15,01
X4	49,9	0,000133	49,81	50
X5	60,02	0,000135	59,91	60,15

Berdasarkan Tabel 2 diketahui bahwa rata-rata Diameter 1 pin Aluminium (X1) sebesar 9,995 dengan keragaman sebesar 0,000127, nilai Diameter 1 terendah sebesar 9,96 sedangkan nilai tertinggi sebesar 10,01. Rata-rata Diameter 2 pin Aluminium (X2) sebesar 9,99 dengan keragaman sebesar 0,000129, nilai Diameter 2 terendah sebesar 9,95 sedangkan nilai tertinggi sebesar 10,01, Rata-rata Diameter 3 pin Aluminium (X3) sebesar 14,99 dengan keragaman sebesar 0,000131, nilai Diameter 3 terendah sebesar 14,95 sedangkan nilai tertinggi sebesar 15,01, Rata-rata Length 1 pin Aluminium (X4) sebesar 49,9 dengan

keragaman sebesar 0,000133, ukuran Length 1 terendah sebesar 49,81 sedangkan ukuran tertinggi sebesar 50, Rata-rata Length 2 pin Aluminium (X5) sebesar 60,2 dengan keragaman sebesar 0,000135, ukuran Length 2 terendah sebesar 59,91 sedangkan ukuran tertinggi sebesar 60,15.

Uji Normal Multivariat

Tabel 2. Uji Normalitas Multivariat

Test	Nilai Statistik	Nilai Kritis	P_Value
Skewness	41.811	49,802	0.199
Kurtosis	-0.8798	1,96	0.3789

Kesimpulan dari table 4.2 pada taraf nyata $\alpha = 0,05$, nilai statistik < nilai kritis atau $41.811 < 49,802$ Maka dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal.

Diagram Kontrol T2 –Hotelling

Berikut ini akan disajikan hasil peta pengamatan dengan menggunakan diagram kontrol T2 – Hotelling. Dengan banyaknya periode $m=60$, banyaknya variable $p=5$, dan $ARL_0 = 247.72$ yang juga digunakan oleh MCUSUM Healy, diperoleh kuantil dari distribusi beta,

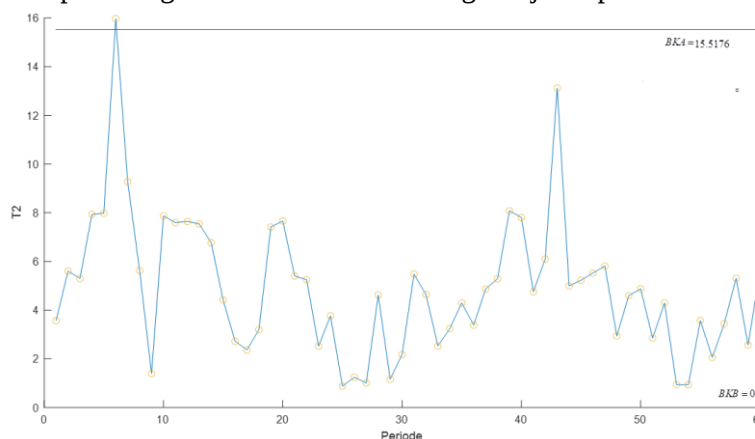
$$\beta_{0.995963, 2.4, 27} = 0.2675$$

Dengan demikian batas-batas kontrolnya :

$$BKA = \frac{(60-1)^2}{60} \beta_{0.995963, 2.4, 27} = 15.5176$$

$$BKB = 0$$

Plot semua nilai T² pada diagram kontrol T²–Hotelling disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Daerah Penolakan Hipotesis

Dari Gambar 1 pengamatan periode 6 berada di atas BKA. Dengan demikian ke tiga diagram kontrol menyatakan hasil yang sama yaitu proses out of kontrol.

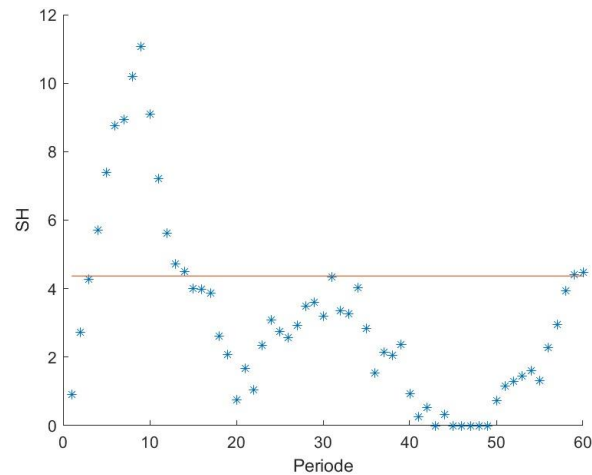
Diagram Kontrol MCUSUM Healy

Untuk diagram kontrol MCUSUM Healy akan digunakan pergeseran parameter rata-rata sebesar $k=0.5$ sigma Adapun batas-batas kontrol dengan $ARL_0=247.72$ dari table 2.2. diperoleh :

$$BKA = 4,37235$$

$$BKB = 0$$

Dan hasil plot nya tertera pada gambar 2.



Gambar 2. Hasil Plot Perhitungan Nilai SH

Tampak bahwa pengamatan pada periode 4 sd 13 dan 60 berada di atas BKA, oleh karena itu dapat dikatakan bahwa proses out of kontrol.

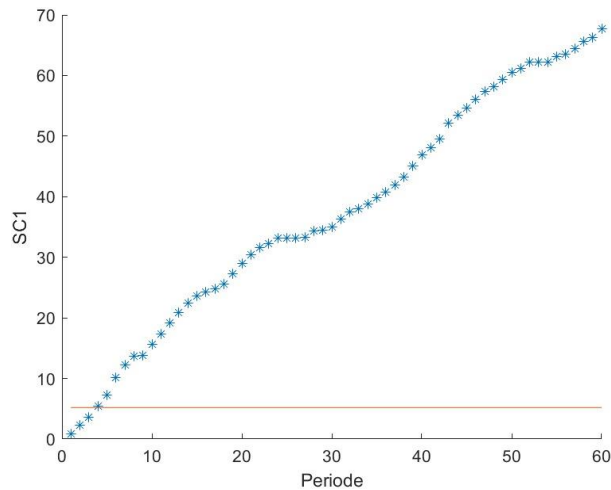
Diagram Kontrol MCUSUM Crosier

Dengan $ARL_0=200$, $k=1$ dan banyaknya variabel $p=5$, diperoleh batas kendali atas MCUSUM Crosier.

$$BKA = 5,2$$

$$BKB = 0$$

Hasil peta semua nilai SC pada digram kontrol adalah sebagai berikut



Gambar 3. Hasil Plot Perhitungan Nilai SC

Tampak bahwa menurut diagram kontrol MCUSUM Crosier pengamatan pertama yang di atas BKA adalah pengamatan pada periode 5 sedangkan pada diagram kontrol Healy pada periode 4. Perbedaan ini dimungkinkan karena ARL_0 nya berbeda.

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

1. Hasil penerapan grafik pengendali MCUSUM Healy (SH) pada pergeseran rata-rata dari perhitungan 5 diameter untuk memutar pin alumunium mengalami out of control pada data ke 4 dan untuk MCUSUM Crosier (SC) pada mengalami out of control pada data

- ke 5. Hal ini dikarenakan terjadinya pergeseran rata rata atau adanya potensi kesalahan pada produksi pin aluminium
2. Dan untuk penerapan grafik pengendali T2 Hotteling terdeteksi pada pengamatan periode 6 berada di atas batas kontrol. Dengan demikian ke tiga diagram kontrol menyatakan hasil yang sama yaitu proses out of kontrol. Tampak diagram kontrol MCUSUM memberikan sinyal out of kontrol paling cepat.

Acknowledge

Penelitian ini dipersembahkan untuk semua pihak yang telah membantu penulis. Terima kasih untuk Allah SWT. yang telah memberikan rahmat serta hidayah-Nya, kedua orang tua yang tak henti-hentinya memanjatkan do'a dan memberi dukungan, Bapak Dr. Suwanda, M.S, yang telah membimbing penulis dengan sabar dan tulus, seluruh dosen dan laboran Statistika UNISBA yang telah memberikan ilmu dan dedikasinya, serta teman-teman yang selalu memberi semangat kepada penulis.

Daftar Pustaka

- [1] Crosier, RB. 1988. Multivariate Generalizations Of Cumulative Sum Quality Control Schemes, *Technometrics*. Vol.30. pp 291-303
- [2] Groover, Mikell P. 2010. *Fundamentals of Modern Manufacturing* Fourth Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Healy JD. A note on multivariate CUSUM procedures. *Technometrics*. 1987; 29: 409-412.
- [4] Johnson, R. A. dan Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis* (6th edition). Pearson Prentice Hall. Upper Saddle River
- [5] .Montgomery, Douglas C. 2009. *Statistical Quality Kontrol: A Modern Introduction* 7 th Edition. United States: Jhon Wiley and Sons, Inc.
- [6] Fadilah, T. S., & Kudus, A. (2023). Penerapan Metode Regresi Kernel Smoothing untuk Imputasi Data Lama Waktu Terinfeksi Covid-19. *Jurnal Riset Statistika*, 51–60. <https://doi.org/10.29313/jrs.v3i1.1802>