

Komputasi Tabel Mortalitas

Addyani Sarah AS*, Sutawanir Darwis

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*addyanisarahas20@gmail.com, std.darwis@gmail.com

Abstract. Computation is a method for solving problems that are formulated quantitatively. Statistical computation is a computational method discussing data management, analysis, and data description. An analysis that is in statistical computing is survival analysis or survival analysis. Survival analysis is a statistical method related to the time until death occurs. Estimation of the probability of death can be used to help estimate human age, as a basis for calculations in insurance. The probability of someone dying (qx) presented in tabular form is known as the mortality table, where one of the estimating methods for qx is the moment method. By converting the calculation in decimal years, calculating the age vector, converting the age vector into a duration vector, exact exposure, estimating the probability of dying at age x (qx).

Keywords: *Computation, Moment Method, Mortality Table, Probability of Dying.*

Abstrak. Komputasi merupakan metode untuk menyelesaikan permasalahan yang diformulasikan secara kuantitatif. Komputasi statistika merupakan salah satu metode komputasi membahas mengenai management data, analisis, serta pendeskripsian data. Suatu analisis yang ada dalam komputasi statistik adalah analisis survival atau analisis ketahanan hidup. Analisis survival adalah suatu metode statistik yang berhubungan dengan waktu sampai terjadinya suatu kejadian kematian. Penaksiran peluang meninggal dapat digunakan untuk membantu menaksir usia manusia, sebagai landasan perhitungan dalam asuransi. Peluang meninggal seseorang (qx) yang disajikan dalam bentuk tabel dikenal dengan sebutan tabel mortalitas, dimana salah satu metode penaksir untuk qx adalah metode momen. Dengan perhitungan mengubah dalam tahun desimal, menghitung vektor usia, konversi vektor usia menjadi vektor durasi, exact exposure, penaksiran peluang meninggal pada usia x (qx).

Kata Kunci: *Komputasi, Metode Moment, Table Mortalitas, Peluang Meninggal.*

A. Pendahuluan

Komputasi merupakan metode untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan diformulasikan secara analitik dengan cara operasi hitungan. Perhitungan matematis tidak semuanya dapat diselesaikan dengan mudah. Jika suatu persoalan sudah sangat sulit atau tidak mungkin diselesaikan dengan metode analitik maka dapat menggunakan komputasi sebagai alternatif penyelesaian persoalan. Komputasi statistika merupakan salah satu metode komputasi membahas manajemen data, analisis, serta deskripsian data, salah satu analisis yang ada dalam komputasi statistik adalah analisis *survival* atau analisis data ketahanan hidup. Ketahanan hidup adalah suatu statistika untuk menganalisis data dengan variabel terikat waktu sampai terjadinya suatu kejadian (Kleinbaum dan Klein, 2005). Variabel yang menyatakan jangka waktu dari awal pengamatan hingga kejadian yang diinginkan terjadi pada objek tersebut disebut waktu *survival* atau *failure time*. Salah satu contoh kejadian dalam analisis *survival* adalah kematian. Pada kehidupan sehari-hari, kita tidak dapat menentukan kapan seseorang akan meninggal dunia. Walaupun demikian kita dapat menghitung rata-rata usia seseorang yang telah meninggal sebelumnya sehingga secara matematika peluang hidup dapat diprediksi. Peluang meninggal seseorang yang disajikan dalam bentuk tabel dikenal dengan sebutan *life table* (tabel mortalitas). Cukup banyak manfaat yang diperoleh dari tabel mortalitas, dalam bidang demografi untuk memprediksi jumlah penduduk di masa mendatang, bidang asuransi untuk menentukan besar premi yang harus dibayar oleh pemegang asuransi, dan bidang kesehatan dalam menentukan peluang seseorang dapat bertahan jangka waktu tertentu. Begitu juga dalam bidang pendidikan memperkirakan jumlah penduduk usia sekolah, jumlah murid, jumlah guru, gedung- gedung sekolah, dan pendidikan pada masa yang akan datang, oleh karena itu perlu disusun tabel mortalitas. Bowers (1997), tabel mortalitas merupakan suatu tabel yang terdiri atas kolom usia x , banyak orang yang hidup usia x yaitu l_x , banyak meninggal antara usia x sampai $x+1$ yaitu d_x , serta peluang seseorang berusia x meninggal sebelum mencapai usia $x+1$, yaitu q_x . Dalam skripsi ini akan membahas cara menghitung q_x yang akan ditaksir menggunakan metode momen.

B. Metodologi Penelitian

Penaksiran peluang hidup digunakan untuk menaksir daya tahan hidup individu suatu keadaan tertentu, sebagai landasan perhitungan premi asuransi, dan menaksir pertumbuhan populasi. Alat untuk menaksir peluang hidup dikenal dengan fungsi *survival*. Misalkan X peubah acak waktu kontinu yang menyatakan usia kematian, dan X memiliki fungsi distribusi $F(x)$, (Bowers, 1997):

$$F(x) = P(X \leq x); x \geq 0 \quad (1)$$

dan fungsi survival:

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x); x \geq 0 \quad (2)$$

diasumsikan $F(0) = 0$, berarti $S(0) = 1$. Fungsi $S(x)$ disebut fungsi kelangsungan hidup. $S(x)$ diartikan sebagai peluang seseorang yang baru lahir akan bertahan hidup sampai usia x .

Mortalitas merupakan salah satu dari tiga komponen demografi selain fertilitas dan migrasi, yang dapat mempengaruhi jumlah dan komposisi umur penduduk (Oktavianto, 2016). Organisasi Kesehatan Dunia (World Health Organization) mendefinisikan mortalitas sebagai suatu peristiwa hilangnya kehidupan secara permanen, yang bisa terjadi setiap saat setelah kelahiran hidup.

Peluang meninggal seseorang yang disajikan dalam bentuk tabel dikenal dengan sebutan *life table* (tabel mortalitas). Tabel mortalitas ini berisi daftar dari l_x , d_x , q_x dan sebagainya. Dimana l_x adalah jumlah orang yang hidup pada usia x , sedangkan d_x menyatakan jumlah orang dari l_x yang meninggal dalam setahun, jadi antara usia x dan $x+1$ tahun. Ini berarti:

$$d(x) = l_x - l_{x+1} \quad (3)$$

$$q(x) = \frac{d_x}{l_x} \quad (4)$$

atau yang lebih umum,

$$tq(x) = \frac{tdx}{lx} \quad (5)$$

qx menyatakan peluang seorang tepat berusia x akan meninggal sebelum mencapai hari ulang tahunnya yang ke $x+1$. Sehingga peluang orang berusia x akan hidup t tahun lagi (London, 1997) adalah:

$$tp(x) = 1 - tqx = \frac{lx - tdx}{lx} = \frac{lx + 1}{lx} \quad (6)$$

Untuk setiap orang dalam pengamatan terdapat tiga usia penting yaitu: Usia sebenarnya saat masuk pengamatan (y_i), usia keluar dari pengamatan (z_i) karena dijadwalkan untuk berakhirnya suatu pengamatan atau keluar dari pengamatan karena meninggal. Dan kita notasikan usia saat kerusakan terjadi dengan θ_i , jika orang i tidak meninggal dalam pengamatan tersebut maka $\theta_i = 0$. Oleh karena itu vektor usia untuk setiap orang yang berada dalam pengamatan, (London, 1997):

$$v'_i = [y_i, z_i, \theta_i] \quad (7)$$

Langkah selanjutnya adalah mengubah vektor usia menjadi vektor durasi untuk interval $(x, x + 1]$, yang menunjukkan durasi fraksional dalam $(x, x + 1]$ dimana pengamatan dimulai, dijadwalkan berakhir, atau benar-benar berakhir sampai mati. Vektor durasi ditunjukkan oleh:

$$u'_{i,x} = [r_i, s_i, r_i] \quad (8)$$

Hubungan vektor usia dan vektor durasi pada interval $(x, x + 1]$ adalah:

$$(exact\ exposure)_{i,x} = r_i - r_i \quad (9)$$

Untuk total *exact exposure* pada $(x, x + 1]$ diperoleh dengan menjumlahkan *exact exposure* semua orang yang berkontribusi pada $(x, x + 1]$, sehingga:

$$(exact\ exposure)_{i,x} = \sum (exact\ exposure)_{i,x} \quad (10)$$

Orang i mempunyai dua pilihan dalam selang pengamatan $(x, x + 1]$, yaitu masih berfungsi sampai akhir pengamatan dengan peluang $s_i - r_i$ $px + r_i$ atau meninggal sebelum waktu pengamatan selesai dengan peluang $s_i - r_i$ $qx + r_i$. Dapat dikatakan bahwa orang tersebut mengikuti distribusi Bernoulli.

Jika I adalah peubah acak yang menyatakan keadaan orang i , maka I_i mempunyai nilai:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{jika meninggal dalam selang } (x, x + 1], \\ 0 & \text{jika masih berfungsi dalam selang } (x, x + 1]. \end{cases} \quad (11)$$

Kepadatan peluang dari orang i adalah:

$$f(x_i) = \begin{cases} s_i - r_i \quad qx + r_i, & \text{bila } X_i = 1 \\ s_i - r_i \quad px + r_i, & \text{bila } X_i = 0 \end{cases} \quad (12)$$

dengan demikian nilai harapan kematian dari orang i , adalah

$$E(X_i) = \sum x_i \cdot f(x_i) \quad (13)$$

$$x_i = 1 \cdot s_i - r_i \quad qx + r_i + 0 \cdot s_i - r_i \quad px + r_i$$

$$x_i = 1 \cdot s_i - r_i \quad qx + r_i$$

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ adalah peubah acak yang menyatakan kondisi dari n orang dalam selang pengamatan $(x, x + 1]$. Keberadaan seseorang terhadap orang lainnya adalah saling bebas. Misalkan D_x adalah banyaknya orang meninggal dari n orang dalam selang $(x, x + 1]$. Nilai D_x dinyatakan dengan dx .

D_x , dirumuskan sebagai $D_x = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$, yaitu D_x berdistribusi Binomial. Nilai harapan kematian dari D_x adalah:

$$E[D_x] = E[I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n] = E\left[\sum_{i=1}^n I_i\right] = \sum_{i=1}^n s_i - r_i \quad qx + r_i \quad (14)$$

Berdasarkan prinsip metode moment, penaksiran qx diperoleh dengan menyamakan $E[D_x]$ dengan dx , sehingga diperoleh persamaan momennya adalah n

$$E[Dx] = \sum_{i=1}^n si - ri qx + ri = dx \quad (15)$$

Untuk menyelesaikan persamaan diatas akan digunakan aproksimasi linear, $si - ri qx + ri \approx (si - ri) \cdot qx$, dapat dituliskan sebagai:

$$E[Dx] = \sum_{i=1}^n (si - ri)qx = dxqx \sum_{i=1}^n (si - ri) = dxqx = \sum_{i=1}^n \frac{dx}{(si - ri)} \quad (16)$$

dengan demikian diperoleh penaksiran q_x sebagai berikut:

$$\hat{q}_x = \frac{dx}{\sum_{i=1}^n (si - ri)} \quad (17)$$

atau untuk kasus *exact exposure* adalah:

$$\hat{q}_x = \frac{dx}{\sum_{i=1}^n (exact\ exposure)} = \frac{dx}{\sum_{i=1}^n (si - ri) + \sum_{i=1}^n (ri - ri)} \quad (18)$$

Dengan teknik pengambilan sampel yaitu Proposional Stratified Sampling diperoleh jumlah sampel penelitian sebanyak 91 siswa. Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah kuesioner, wawancara, observasi, dan studi pustaka. Adapun teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah teknis analisis deskriptif dan teknik analisis inferensial.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Berdasarkan data yang terdiri dari 15 orang beserta tanggal lahir, tanggal mulai asuransi, dan tanggal meninggal. Dilihat dari tanggal paling awal observasi dimulai pada tanggal 1 januari 1990, dan berakhir pada 31 Desember 1999. Dapat dikatakan bahwa POnya adalah 9 tahun.

Hasil Mengubah Data Tanggal ke dalam Tahun Desimal

Data pada yang terdiri dari 15 orang beserta tanggal lahir, tanggal mulai , dan tanggal mati. Untuk mempermudah perhitungan maka perlu mengubah data tanggal lahir, tanggal mulai , dan tanggal meninggal ke dalam tahun desimal. Diketahui bahwa tanggal lahir orang ke-1 adalah 2 juli 1956. Dalam satu tahun terdiri dari 365 hari, pada Lampiran 3 tanggal 2 juli adalah hari ke 183, maka tahun desimalnya adalah:

$$\frac{1956 + 183}{365} = 1956,5014$$

Jadi tanggal lahir orang ke-1 dalam tahun desimal adalah 1956,5014.

Menghitung Vektor Usia

Orang ke-1 lahir pada tahun 1956,5014 dan mulai di fungsikan pada tahun 1988,2411 serta meninggal pada tahun 1990,0110. Dari keterangan tersebut dapat dihitung vektor usia. Vektor usia terdiri dari usia saat masuk Periode Observasi (PO) dinotasikan dengan y_i , usia saat keluar PO (z_i), dan usia saat mati (θ_i). Usia saat masuk PO untuk orang ke-1 adalah

$$y_1 = \text{tanggal mulai} - \text{tanggal lahir} = 1988,2411 - 1956,5014 = 31,7397$$

Akhir periode observasinya adalah 31 Desember 1999, maka saat usia keluar POnya adalah:

$$z_1 = 2000 - \text{tanggal lahir} = 2000 - 1956,5014 = 43,4986$$

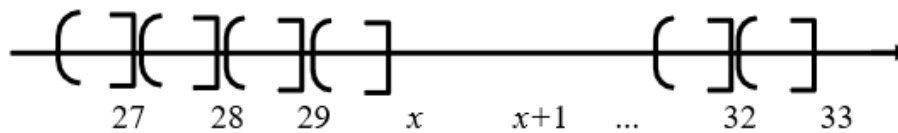
dan usia saat meninggalnya adalah:

$$\theta_1 = \text{tanggal meninggal} - \text{tanggal lahir} = 1990,0110 - 1956,5014 = 33,5096$$

Dengan cara yang sama untuk orang ke-2 dan seterusnya.

Mengkonversi Vektor Usia menjadi Vektor Durasi

Vektor durasi terdiri dari usia masuk terhadap x (ri), usia keluar terhadap x (si), dan usia meninggal terhadap x (ti). Untuk menghitung vektor durasi maka dibuat interval usia ($x, x+1$). Untuk nilai minimum x di peroleh dari usia termuda saat masuk PO, dan nilai maksimum x diperoleh dari usia tertua saat meninggal. Maka interval usianya adalah:



Interval usia (27,28] atau untuk $x = 27$. Dapat diketahui banyaknya orang yang berada dalam interval (27,28] adalah $n=1$, yaitu orang ke-2. Orang ke-2 masuk PO pada usia 27,12 dan keluar pada usia 38,09 serta meninggal pada usia 30,07.

Untuk menghitung usia masuk terhadap $x = 27$ orang ke-2 masuk pengamatan pada usia 27,12 dimana $27 < 27,12 < 28$ maka:

$$r_2 = y_2 - x = 27,12 - 27 = 0,12$$

Artinya orang tersebut mulai berkontribusi dalam interval (27,28] setelah berdursi 0,12. Untuk menghitung usia keluar terhadap $x = 27$. Orang ke-2 meninggalkan pengamatan pada usia dimana $38,09 > 28$, maka $s_{22} = 1$. Artinya saat keluar dari interval (27,28] orang tersebut masih dalam periode pengamatan.

Untuk menghitung usia meninggal terhadap $x = 27$ menggunakan Persamaan (2.25). Orang ke-2 meninggal pada usia 30,07 dimana $30,07 > 28$, maka $s_2 = 0$. Artinya saat keluar dari interval (27,28] orang tersebut masih hidup. Dengan cara yang sama untuk interval (28,29] dan seterusnya.

Hasil Menghitung Exact Exposure

Pada interval (27,28] terdiri dari satu orang yaitu orang ke-2, berdasarkan hasil perhitungan vektor durasi diperoleh $r_2 = 0,12$, $s_2 = 1$ dan $r_2 = 0$, maka *Exact Exposure* untuk orang ke-2 menggunakan Persamaan (2.26) adalah:

$$s_2 - r_2 = 1 - 0,12 = 0,88$$

Dan dengan menggunakan persamaan 2.26 diperoleh hasil total *Exact Exposure* pada interval (27,28] adalah 0,88. Sehingga di peroleh total exact Exposurenya yaitu:

Tabel 1. Exact Exposure

Interval	Total Exact Exposure
(27, 28]	0,88
(28,29]	1
(29,30]	1,06
(30,31]	5,45
(31,32]	9,91
(32,33]	13,13

Hasil Penaksiran Peluang Meninggal Pada Usia $x(\hat{q}_x)$

Untuk menaksir peluang meninggal pada usia x , sebelumnya harus mengetahui banyaknya yang meninggal (dx) pada interval $(x, x+1]$. Peluang meninggal dihitung menggunakan Persamaan (2.33) dengan syarat $dx > 0$. Karena pada interval (27,28] sampai interval (30,31] $dx = 0$, maka tidak dapat hitung peluang meninggalnya. Berdasarkan Tabel interval (30,31], dapat diperoleh peluang meninggal pada usia 30 tahun adalah:

$$q_x = \frac{dx}{\sum_{i=1}^n (\text{exact exposure})} = \frac{1}{5,54} = 0,1805$$

Dengan cara yang sama untuk usia 31 tahun dan seterusnya disajikan pada

Tabel 2. Perhitungan Peluang Meninggal usia $x(\hat{q}_x)$

X	dx	Total Exact Exposure	$\hat{q}_x$
30	1	5,54	0,1805
31	3	9,91	0,3027
32	2	13,13	0,1523

D. Kesimpulan

Estimasi peluang kematian merupakan kuantitas penting dalam perhitungan premi asuransi, prediksi penduduk, prediksi populasi serangga. Skripsi ini membahas metode moment untuk menaksir peluang kematian individu. Sebagai studi kasus digunakan data mortalita dari buku London. Hasil pengolahan dan analisis data menunjukkan bahwa metode moment dapat digunakan untuk membangun table mortalita suatu populasi.

Daftar Pustaka

- [1] Bowers, N.L.dkk. (1997). Actuarial Mathematics. Illinois: The Society of Actuaries.
- [2] Kudus, Abdul dan Muchlis R.D. (2013) . Dasar-dasar Reliabilitas. Bandung London, Dick. (1997). Survival Models and Their Estimation. Third edition.
- [3] Oktavianto, Dendy. (2016). Mortalitas, (<https://dendyoktavianto23.wordpress.com/2016/10/17/pengertian-faktor-kematian-mortalitas/>, diakses tanggal 20 Juli 2022
- [4] Wildan, Karyana, Yayat. (2021). Evaluasi Kesalahan Proyeksi Penduduk Tahun 2020 untuk Memproyeksikan Penduduk Tahun 2025 Provinsi Jawa Barat. Jurnal Riset Statistika 1(2).92-98.