

Diagram Kendali Multivariat T^2 Hotelling pada Instalasi Pengolahan Air Limbah

Afina Ramdhanian*, Nur Azizah Komara Rifai

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*afinaramdhanian2@gmail.com, azizah_kr@yahoo.com

Abstract. Control chart is a statistical tool that can be used to control the quality of a production process. Often the production process uses data from several correlated variables (multivariate data), so the control chart used is the T^2 Hotelling control chart. The production process in this study uses wastewater treatment data at the WWTP (Wastewater Treatment Plant) textile industry company CV. Sandang Sari period 2018-2021 as many as 48 samples (months) with 6 variables of liquid waste content. The T^2 Hotelling control chart is used to detect process shifts by using an average vector and can be used to detect out-of-control observations by setting control limits, the upper control limit value is 24.51, then it is detected 2 points are outside the upper control limit (out of control).

Keywords: *Multivariate Statistical Process Control, T^2 Hotelling Control Diagram, Liquid Waste, WWTP.*

Abstrak. Diagram kendali merupakan alat statistik yang dapat digunakan untuk mengontrol kualitas suatu proses produksi. Seringkali proses produksi menggunakan data dari beberapa variabel yang berkorelasi (data multivariat), maka diagram kendali yang digunakan adalah diagram kendali T^2 Hotelling. Proses produksi pada penelitian ini menggunakan data pengolahan limbah cair pada IPAL (Instalasi Pengolahan Air Limbah) perusahaan industri tekstil CV. Sandang Sari periode 2018-2021 sebanyak 48 sampel (bulan) dengan 6 variabel kandungan limbah cair. Diagram kendali T^2 Hotelling digunakan untuk mendeteksi pergeseran proses dengan menggunakan vektor rata-rata dan dapat digunakan untuk mendeteksi pengamatan di luar kendali (*out of control*) dengan menetapkan batas-batas kontrol, diperoleh nilai batas kendali atas sebesar 24,51, maka terdeteksi 2 titik berada diluar batas kendali atas (*out of control*).

Kata Kunci: *Multivariate Statistical Process Control, Diagram Kendali T^2 Hotelling, Limbah Cair, IPAL.*

A. Pendahuluan

Pengendalian kualitas statistika merupakan suatu metode yang menganalisis kinerja suatu proses dengan menerapkan teknik statistika. Diagram kendali merupakan alat statistika yang sering digunakan dalam pengendalian kualitas di bidang industri (Montgomery, 2009). Pengendalian kualitas dapat digunakan untuk data multivariat atau lebih dikenal dengan nama *Multivariate Statistical Process Control* (MSPC). Karakteristik atau variabel dari MSPC memiliki sifat yang saling terkait, sehingga analisis dilakukan secara simultan. Dalam MSPC terdapat beberapa diagram kendali yaitu diagram kendali multivariat CUSUM, diagram kendali T^2 Hotelling, dan diagram kendali multivariat EWMA. Diagram kendali T^2 Hotelling memiliki beberapa kelebihan antara lain, interpretasi sinyal yang memadai, fleksibilitas, kepekaan terhadap perubahan proses yang kecil, dan ketersediaan *software* dalam penggunaannya (Mason & Young, 2002). Sehingga diagram kendali T^2 Hotelling paling umum digunakan untuk mengontrol proses produksi.

Multivariate Statistical Process Control sering dijumpai pada banyak industri, contohnya industri tekstil. Terjadinya peningkatan industri tekstil khususnya wilayah Jawa Barat sejalan dengan tingginya permintaan di pasar (Kemenperin, 2019). Kota dan kabupaten Bandung menjadi pusat industri tekstil terbesar di Indonesia (Indriyanto, 2017). CV. Sandang Sari merupakan salah satu perusahaan industri tekstil di daerah Bandung Timur. Pada tahun 2018 kendala pengelolaan air limbah sempat terjadi pada perusahaan ini. Pihak perusahaan sudah memasang IPAL (Instalasi Pengolahan Air Limbah) sejak berdiri pada tahun 1963, namun karena produksi pabrik meningkat maka pengelolaan limbah pada IPAL pun meningkat (Nugraha, 2018). Oleh karena itu, pengolahan limbah cair harus melalui proses pengendalian kualitas yang sesuai sebelum dibuang ke lingkungan, agar tidak membahayakan lingkungan sekitar (Arba, Wibawati, & Paramita, 2019). Sehingga pada penelitian ini akan diterapkan diagram kendali multivariat T^2 Hotelling pada instalasi pengolahan air limbah CV. Sandang Sari.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut: “Apakah terdapat pengamatan (bulan) di luar kendali menggunakan diagram kendali T^2 Hotelling?”

Selanjutnya, tujuan dalam penelitian ini diuraikan dalam pokok-pokok sbb.

1. Mengetahui adanya pengamatan (bulan) di luar kendali menggunakan diagram kendali T^2 Hotelling.

B. Metodologi Penelitian

Bahan

Penelitian ini menggunakan metode diagram kendali T^2 Hotelling data individual. Data yang digunakan pada penelitian ini merupakan data sekunder yaitu data hasil uji kualitas pengolahan air limbah pada Instalasi Pengolahan Air Limbah (IPAL) perusahaan industri tekstil CV. Sandang Sari, sebanyak 48 data (bulan), dimulai dari bulan Januari 2018 hingga Desember 2021. Karakteristik yang akan diamati pada penelitian ini berupa variabel-variabel indikator kualitas air pengolahan limbah sebanyak 6, yaitu *Biological Oxygen Demand* (BOD) (mg/L), *Chemical Demand* (COD) (mg/L), *Total Suspended Solid* (TSS) (mg/L), Amonia Total (NH_3-N) (mg/L), Sulfida (mg/L), dan pH.

Metode Analisis

Pengujian Normalitas Multivariat dengan Grafik Q-Q Plot

Uji normalitas Multivariat secara visual dapat dilakukan dengan menggunakan grafik Q-Q plot berdasarkan nilai jarak kuadrat mahalanobis d_i^2 sebagai sumbu y

$$d_i^2 = (x_{ij} - \bar{x}_j)^t S^{-1} (x_{ij} - \bar{x}_j) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, p \end{matrix}$$

Di mana,

$\bar{x}_j$: vektor rata-rata variabel ke-j

S : matriks kovarians berukuran $(p \times p)$

n : ukuran sampel

p : banyaknya variabel

d_i^2 tersebut diurutkan dari nilai terkecil sampai nilai terbesar.

$$d_{(1)}^2 \leq d_{(2)}^2 \leq \dots \leq d_{(n)}^2$$

Tentukan nilai masing-masing probabilitas p_i dengan persamaan:

$$p_i = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Selanjutnya menghitung nilai kuartil dari distribusi *chi-square* (q_i) sebagai sumbu x berdasarkan nilai (p_i) dan jumlah variabel (p), dengan persamaan sebagai berikut:

$$q_i = \chi_{p, p_i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pengujian Normalitas Multivariat dengan Nilai Skewness dan Kurtosis

1. Hipotesis

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

2. Statistik Uji

Statistik uji menggunakan *mardia's test* diperoleh menggunakan persamaan sebagai berikut (Wulandari, Sutrisno, & Nirwana, 2021):

Untuk *skewness*:

$$z_1 = \frac{(p+1)(n+1)(n+3)}{6[(n+1)(p+1)-6]} b_{1,p}$$

Di mana p adalah jumlah variabel, dan $b_{1,p}$:

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(x_i - \bar{x}_j)^t S^{-1} (x_i - \bar{x}_j)]^3$$

Di mana S^{-1} merupakan invers dari matriks kovarians

Untuk *kurtosis*:

$$z_2 = \frac{b_{2,p} - p(p+2)}{\sqrt{8p(p+2)/n}}$$

Di mana:

$$b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}_j)^t S^{-1} (x_i - \bar{x}_j)]^2$$

3. Kriteria Uji

Jika nilai statistik *skewness* dan *kurtosis* memenuhi persamaan :

$$|z_{\alpha/2}| > |z_1 \text{ atau } z_2| \text{ atau } p\text{-value} > \alpha$$

maka H_0 diterima atau data berdistribusi normal multivariat

T^2 Hotelling Data Individual

Diagram kendali T^2 Hotelling untuk data individual merupakan pengendalian data multivariat yang digunakan apabila nilai tiap sampel (m) diperoleh secara langsung dengan observasi (n) yang hanya dilakukan 1 kali saja pada setiap sampel. Persamaan T^2 Hotelling untuk data individual sebagai berikut :

$$T_i^2 = (x_{ij} - \bar{x}_j)^t S^{-1} (x_{ij} - \bar{x}_j) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$S_i = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ij} - \bar{x}_j)' \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_2^2 & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_p^2 \end{bmatrix}$$

Batas kendali untuk diagram kendali T^2 Hotelling individual, dengan m adalah ukuran sampel dan p adalah banyaknya variabel :

Upper Control Limit (UCL):

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, \frac{p(q-p-1)}{2}} \quad \text{dengan} \quad q = \frac{2(m-1)^2}{(3m-4)}$$

Dengan nilai β diperoleh dari tabel distribusi menggunakan software microsoft excel. Sedangkan nilai LCL sebesar: $LCL = 0$

Tahapan Analisis

Adapun langkah-langkah dari penelitian ini yaitu:

1. Menentukan ukuran minimum sampel yang dibutuhkan
2. Melakukan eksplorasi data yaitu menyajikan deskriptif data dan menangani missing value
3. Menguji Distribusi Normal Multivariat dengan Q-Q plot dan nilai *skewness* dan kurtosis. Jika data tidak normal maka dilakukan transformasi Box-Cox
4. Membuat diagram kendali T^2 Hotelling untuk data individual dimulai dengan :
 - a. Menghitung vektor rata-rata $\bar{x}_j$, lalu menghitung matriks kovarians S
 - b. Menghitung nilai T_i^2 untuk masing-masing sampel
 - c. Menghitung batas kendali UCL, dengan nilai LCL ditetapkan sebesar 0.
 - d. Nilai T^2 Hotelling kemudian dipetakan pada diagram kendali dengan batas yang sudah diperoleh. Jika terdapat nilai $T^2 > UCL$, maka pengamatan tersebut menjadi indikator out of control.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Ukuran Sampel

Ukuran sampel minimum yang diperlukan pada penelitian ini dapat dihitung dengan persamaan (Boullosa, Larrabe, Lopez, & Gomez, 2016):

$$\text{Ukuran minimum sampel} : 2p + \frac{p(p-1)}{2} = 2(6) + \frac{6(6-1)}{2} = 27$$

Sampel minimum yang dibutuhkan sebanyak 27, sedangkan ukuran sampel pada penelitian ini berjumlah 48, sehingga sudah memenuhi ukuran sampel minimum.

Eksplorasi Data

Tabel 1. Deskriptif Statistik Data Hasil Pengolahan IPAL

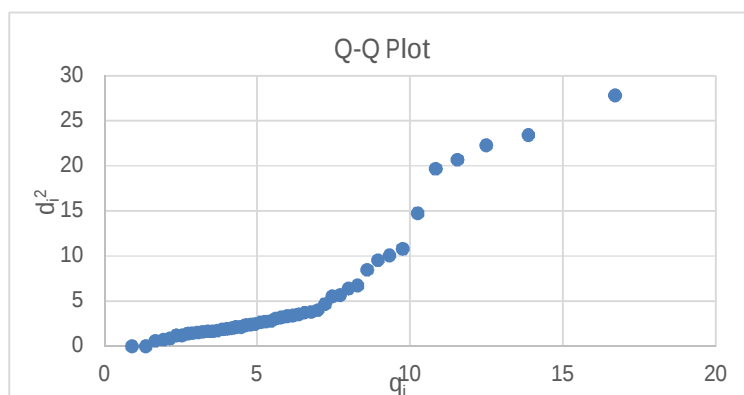
<i>Descriptive Statistics</i>					
<i>Variable</i>	<i>N</i>	<i>N* (missing)</i>	<i>Mean</i>	<i>Minimum</i>	<i>Maximum</i>
BOD	46	2	40,6526	9,22	157,42
COD	46	2	100,6935	24,93	357,79
TSS	46	2	25,4565	10,00	70,00
Amonia	46	2	0,8417	0,004	8,965
Sulfida	46	2	0,0654	0,0012	0,3435
Ph	46	2	6,9914	5,4000	8,4200

Berdasarkan tabel 1 dapat dilihat bahwa terdapat 2 *missing value* pada data, yaitu data ke 30 dan 32 atau bulan Juni 2020 dan Agustus 2020. Data pada penelitian ini termasuk dalam data *time series*, sehingga penanganan *missing value* dilakukan dengan imputasi. Data pada masing-masing variabel tidak memiliki pola trend maupun musiman, sehingga imputasi *missing*

value dilakukan dengan imputasi *mean* (rata-rata).

Uji Normalitas Multivariat

Uji Normalitas Multivariat dengan Q-Q Plot



Gambar 1. Q-Q Plot Uji Normalitas Multivariat Data

Berdasarkan hasil gambar 1 dapat dilihat bahwa data tidak menyebar disekitar garis lurus (linear). Maka dapat dikatakan bahwa data tidak berdistribusi normal multivariat. Untuk mendukung keputusan tersebut dilakukan pengujian normalitas multivariat berdasarkan nilai *skewness* dan *kurtosis*.

Uji Normalitas Multivariat dengan Nilai *Skewness* dan *Kurtosis*

Tabel 2. Hasil Uji Normal Multivariat *Skewness* dan *Kurtosis*

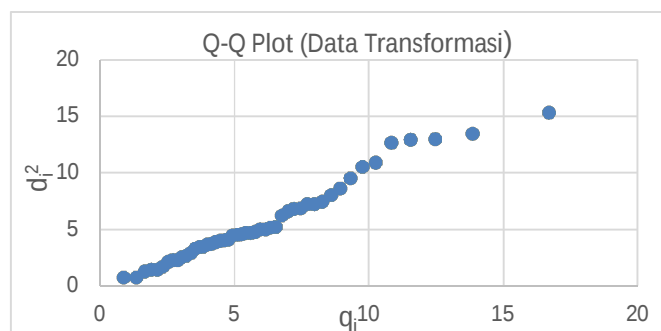
<i>\$multivariateNormality</i>			
<i>Test</i>	<i>Statistic</i>	<i>p value</i>	<i>Result</i>
Mardia <i>Skewness</i>	392.865203830645	4.30528872616466e-52	NO
Mardia <i>Kurtosis</i>	16.113821890189	0	NO

Dapat diketahui berdasarkan tabel 2 nilai *p-value skewness* $< \alpha$ atau $4,3053 \times 10^{-52} < 0,05$, begitu pula dengan *p-value kurtosis* $< \alpha$ atau $0 < 0,05$. Sehingga H_0 ditolak yang berarti bahwa dengan keyakinan 95% data tidak berdistribusi normal multivariat. Sehingga uji asumsi normalitas multivariat tidak terpenuhi, maka harus dilakukan transformasi data.

Transformasi Box-Cox

Transformasi data dengan metode Box-Cox dilakukan menggunakan software Minitab. Nilai λ yang diperoleh untuk variabel BOD, COD, TSS, Amonia Total, Sulfida, dan pH berturut turut yaitu 0; 0; -0,5; 0; 0,23; dan 3.

Uji Normalitas Multivariat Data Hasil Transformasi Box-Cox



Gambar 2. Q-Q Plot Uji Normalitas Multivariat Data Transformasi

Berdasarkan hasil gambar 2 dapat dilihat bahwa data menyebar disekitar garis lurus (linear). Maka dapat dikatakan bahwa data sudah berdistribusi normal multivariat.

Tabel 3. Hasil Uji Normal Multivariat *Skewness* dan *Kurtosis* Data Transformasi

SmultivariateNormality			
Test	Statistic	p value	Result
Mardia Skewness	72.4816560287643	0.068368524108787	YES
Mardia Kurtosis	1.46527324397819	0.142846383330893	YES

Berdasarkan tabel 3 dapat diketahui bahwa $p\text{-value skewness} > \alpha$ atau $0,0683685 > 0,05$. Begitu pula dengan $p\text{-value kurtosis} > \alpha$ atau $0,1428464 > 0,05$. Sehingga H_0 diterima, yang berarti bahwa dengan keyakinan 95% data berdistribusi normal multivariat. Sehingga uji asumsi normalitas multivariat sudah terpenuhi.

Diagram Kendali T^2 Hotelling untuk Data Individual

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (3,57657 \quad 4,47895 \quad 0,21275 \quad -1,36167 \quad 0,48521 \quad 348,05104) \\ S^{-1} &= \begin{pmatrix} 36,87303 & -33,3405 & 30,34564 & 0,32474 & -8,81882 & 0,00935 \\ -33,3405 & 35,33838 & -3,11575 & -0,0572 & 11,61472 & -0,0092 \\ 30,34564 & -3,11575 & 650,8213 & 4,05439 & -15,9994 & 0,03865 \\ 0,32474 & -0,05722 & 4,05439 & 0,36462 & -0,20766 & 0,00143 \\ -8,8188 & 11,61472 & -15,9994 & -0,2077 & 79,53805 & -0,0154 \\ 0,00935 & -0,00924 & 0,03865 & 0,00143 & -0,01539 & 0,00017 \end{pmatrix} \\ T_1^2 &= (x_1 - \bar{x})^t S^{-1} (x_1 - \bar{x}) \\ &= \begin{pmatrix} 3,10189 - 3,57657 \\ 3,90326 - 4,47895 \\ 0,26726 - 0,21275 \\ -3,4296 - (-1,36167) \\ 0,48657 - 0,48521 \\ 291,4343 - 348,05104 \end{pmatrix}^t \\ &\times \begin{pmatrix} 36,87303 & -33,3405 & 30,34564 & 0,32474 & -8,81882 & 0,00935 \\ -33,3405 & 35,33838 & -3,11575 & -0,0572 & 11,61472 & -0,0092 \\ 30,34564 & -3,11575 & 650,8213 & 4,05439 & -15,9994 & 0,03865 \\ 0,32474 & -0,05722 & 4,05439 & 0,36462 & -0,20766 & 0,00143 \\ -8,8188 & 11,61472 & -15,9994 & -0,2077 & 79,53805 & -0,0154 \\ 0,00935 & -0,00924 & 0,03865 & 0,00143 & -0,01539 & 0,00017 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 3,10189 - 3,57657 \\ 3,90326 - 4,47895 \\ 0,26726 - 0,21275 \\ -3,4296 - (-1,36167) \\ 0,48657 - 0,48521 \\ 291,4343 - 348,05104 \end{pmatrix} \\ T_1^2 &= 5,62 \end{aligned}$$

Untuk nilai T_2^2 sampai T_{48}^2 diperoleh dengan perhitungan yang sama. Selanjutnya dilakukan perhitungan nilai batas atas pada diagram kendali atau UCL

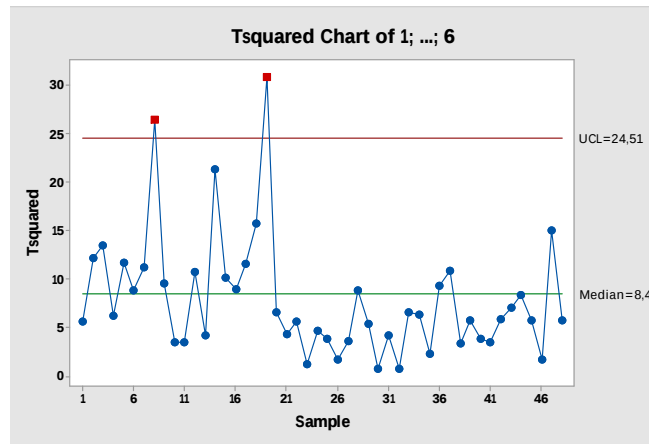
$$\begin{aligned} q &= \frac{2(m-1)^2}{(3m-4)} = \frac{2(48-1)^2}{(144-4)} = 31,557 \\ UCL &= \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, \frac{p}{2}, \frac{(q-p-1)}{2}} \\ &= \frac{(48-1)^2}{48} \beta_{0,9973, \frac{6}{2}, \frac{(31,557-6-1)}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(47)^2}{48} = 0,532551$$

$$= 24,51$$

$$LCL = 0$$

Berikut adalah diagram kendali T^2 Hotelling menggunakan *software* Minitab:



Gambar 3. Diagram Kendali T^2 Hotelling

Berdasarkan Gambar 3, dari 48 titik pengamatan terdeteksi adanya 2 titik yang keluar (*out of control*) dari batas atas diagram kendali (UCL), yakni titik ke 8 adalah bulan Agustus 2018 dan titik ke 19 adalah bulan Juli 2019.

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan diagram kendali T^2 Hotelling pada hasil uji kualitas Instalasi Pengolahan Air Limbah (IPAL) perusahaan industri tekstil CV. Sandang Sari periode bulan Januari 2018 hingga Desember 2021, menunjukkan proses berada dalam keadaan tidak terkendali. Terdeteksi bahwa terdapat 2 pengamatan yang berada diluar batas kendali yaitu pada bulan Agustus 2018 dan bulan Juli 2019.

Acknowledge

Peneliti mengucapkan terima kasih kepada Ibu Nur Azizah Komara Rifai, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan pengarahan sehingga penelitian ini dapat terselesaikan. Dan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam proses penyusunan artikel ilmiah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control, Sixth Edition*. United States of America: Wiley.
- [2] Boullosa, D., Larrabe, J. L., Lopez, A., & Gomez, A. (2016). Monitoring through T^2 Hotelling of cylinder lubrication process of marine diesel engine. *Applied Thermal Engineering*.
- [3] Kemenperin. (2019, November Kamis). *Kemenperin: Industri Tekstil dan Pakaian Tumbuh Paling Tinggi*. Diambil kembali dari Kementerian Perindustrian Republik Indonesia: <https://kemenperin.go.id/artikel/21230/Kemenperin:-Industri-Tekstil-dan-Pakaian-Tumbuh-Paling-Tinggi>
- [4] Indriyanto, A. T. (2017, Mei Rabu). *Daftar Pabrik Tekstil di Bandung*. Diambil kembali

- dari alamatelpon: <https://www.alamatelpon.com/2017/05/daftar-pabrik-tekstil-di-bandung.html?m=1>
- [5] Nugraha, M. (2018, Februari Jumat). *Pemilik CV Sandang Sari Memohon kepada KLHK Agar Pabriknya Jangan Dihentikan Dulu, Ini Alasannya*. Diambil kembali dari Tribun Jabar: <https://jabar.tribunnews.com/2018/02/09/pemilik-cv-sandang-sari-memohon-kepada-klhk-agar-pabriknya-jangan-dihentikan-dulu-ini-alasannya>
- [6] Arba, I. T., Wibawati, & Paramita, N. P. (2019). Pengendalian Kualitas Pengolahan Limbah Air PT. Japfa Comfeed Indonesia Tbk Menggunakan Grafik Kendali Multivariat Berbasis Time Series. *Jurnal Sains dan Seni ITS*.
- [7] Utami, Andi Nur Fadhilah, Suwanda. (2021). *Penggunaan Estimator Robust Reweighted Minimum Covariance Determinant pada Diagram Kontrol T2 Hotelling untuk Monitoring Penyebaran Covid-19 di Korea Selatan*, Jurnal Riset Statistika, 1(1), 63-72.