Penerapan Diagram Kontrol *Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared* (MEWMS) pada Pengendalian Dispersi Kualitas Proses Produksi Air PDAM

Izmi Rizkyanisaputri*, Suwanda

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*izmrizkyanisaputri@gmail.com, idris1000358@gmail.com

Abstract. The availability of clean and suitable for consumption water is one of the efforts to improve the welfare of the community and is the responsibility of the government. Therefore, in order to ensure that the quality of distributed water meets the standards, it is very important to carry out regular water quality control. Control chart are one of the satatistic tools used in statistical quality control that have been useful for practitioners to produce quality goods and services. If there are more than two quality characteristics, control of these variables needs to use a multivariate control chart. In many practical applications, only individual observations are available n = 1. For these conditions, a Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared (MEWMS) control chart can be used to control multivariate dispersions. In this study, the MEWMS control diagram was applied to the quality data of the water production process of PDAM Hazora, Jember Regency consisting of 7 water quality variables. The results of the analysis show that the MEWMS control diagram of the actual data, for each of its observational data is within the control limits at the weighting ω = 0.1; 0,5; 0.9 then, it can be concluded that the process is in control. The simulation results are based on mean vector parameters and data covariance matrix in control, showing that the MEWMS control chart that detects the fastest shift is the diagram using ω = 0.1 with the mean vector shift detected at the time of the 61st observation and for its dispersion at the 115th observation.

Keywords: *Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared Control Chart (MEWMS), Dispersion, PDAM Water Production Process.*

Abstrak. Tersedianya air bersih dan layak konsumsi merupakan salah satu upaya peningkatan kesejahteraan hidup masyarakat dan menjadi tanggung jawab pemerintah. Oleh karena itu, demi memastikan kualitas air yang terdistribusikan telah memenuhi standar, sangat penting untuk melakukan pengendalian kualitas air secara berkala. Diagram kontrol adalah salah satu alat satatistik yang digunakan pada pengendalian kualitas statistik yang telah berguna bagi praktisi untuk menghasilkan barang dan jasa yang berkualitas. Jika terdapat lebih dari dua buah karakteristik kualitas, pengendalian terhadap variabel-variabel tersebut perlu menggunakan diagram kontrol multivariat. Dalam banyak penerapan praktis, hanya pengamatan individual yang tersedia yaitu n sama dengan 1. Untuk kondisi ini, diagram kontrol *Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared* (MEWMS) dapat digunakan untuk mengendalikan dispersi multivariat. Pada penelitian ini diagram kontrol MEWMS diaplikasikan pada data kualitas proses produksi air PDAM Hazora Kabupaten Jember yang terdiri atas 7 variabel kualitas air. Hasil analisis menunjukkan bahwa diagram kontrol MEWMS data aktual, untuk setiap data pengamatannya berada dalam batas-batas kendali pada pembobot ω = 0,1; 0,5; 0,9 maka, dapat disimpulkan bahwa proses terkendali. Hasil simulasi berdasarkan pada parameter vektor rata-rata dan matriks kovarians data terkendali, menunjukkan bahwa diagram kontrol MEWMS yang mendeteksi pergeseran paling cepat adalah diagram menggunakan ω = 0,1 dengan pergeseran vektor rata-rata terdeteksi pada saat pengamatan ke-61 dan untuk dispersinya pada pengamatan ke-115.

Kata Kunci: *Diagram Kontrol Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared (MEWMS), Dispersi, Proses Produksi Air PDAM.*

Corresponding Author
Email: idris1000358@gmail.com

A. Pendahuluan

Pengendalian proses statistik (*statistical process control*/SPC) merupakan metode yang digunakan dalam memantau suatu proses. Pengendalian kualitas secara umum dilakukan dengan cara mengambil pengamatan berukuran n dalam waktu periode tertentu yang dikenal dengan *rational subgroup concept* [1]. Pada proses produksi dengan skala besar setiap periodenya biasanya n > 1, sedangkan pada proses produksi dengan skala kecil atau pemeriksaan yang sifatnya merusak biasanya n = 1. Pengendalian kualitas secara statistik yang biasa digunakan adalah diagram kontrol (*control* chart).

Diagram kontrol merupakan alat yang biasa digunakan dalam memantau suatu proses terkendali secara statistik atau tidak sehingga, dapat mencari solusi suatu permasalahan dan mendapatkan hasil kualitas yang baik [2]. Faktor-faktor yang dapat mempengaruhi kualitas produk atau jasa perlu diawasi dengan teliti. Karena dengan memperbaiki satu karakteristik kualitas, belum tentu karakteristik kualitas yang lainnya akan membaik. Diagram kontrol dibagi menjadi dua menurut banyaknya karakteristik kualitas yang digunakan, yaitu diagram kontrol univariat dan diagram kontrol multivariat. Diagram kontrol univariat digunakan apabila yang akan diamati haya satu karakteristik kualitas, sedangkan diagram kontrol multivariat digunakan jika kualitas yang diamati lebih dari dua [3]. Huwang et al telah mengusulkan diagram kontrol untuk dispersi multivariat dengan ukuran sampel tunggal yang diberi nama diagram kontrol *Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared* (MEWMS) yang dibangun berdasarkan *trace* estimasi matriks kovarians sebagai ukuran dispersi multivariat yang digunakan(Mukminin et al., n.d.).

Air merupakan salah satu elemen yang berguna untuk semua makhluk hidup yang ada di bumi. Air dimanfaatkan oleh manusia untuk berbagai macam kebutuhan, air yang digunakan tentunya adalah air bersih dengan syarat tertentu secara fisik, kimiawi, dan biologis. Sudah menjadi tanggung jawab pemerintah untuk melakukan suatu upaya peningkatan kesejahteraan hidup masyarakat yaitu salah satunya dengan ketersediaan air bersih dan layak konsumsi. Di mana, pelaksana yang bertanggung jawab untuk menyediakan air minum di kabupaten/kota adalah perusahaan daerah air minum (PDAM). Untuk perusahaan yang bertanggung jawab menyediakan kebutuhan air minum di wilayah Kaliwates, kabupaten Jember adalah PDAM HAZORA. Air minum yang layak untuk dikonsumsi sudah diatur dalam undang-undang Menteri Kesehatan RI Nomor 492 Tahun 2010. PDAM Hazora melakukan pengendalian air secara berkala agar dapat memastikan kualitas air yang akan dikonsumsi memenuhi standar. Maka dari itu, kualitas dan proses produksi air perlu diawasi dengan seksama(Zakiyatis Salmaini & Suliadi, 2021).

Berdasarkan penjelasan latar belakang diatas, penulis menggunakan diagram kontrol MEWMS pada pengendalian dispersi kualitas proses produksi air di PDAM HAZORA kabupaten Jember. Penelitian ini menggunakan tujuh variabel parameter kimia wajib kualitas air minum berdasarkan persyaratan yang telah ditetapkan oleh Permenkes RI No. 492 Tahun 2010 yaitu, kandungan nitrat (NO3), pH, sisa chlor, flourida (F), aluminium (Al), besi (Fe), dan mangan (Mn). Maka, judul dalam skripsi ini adalah "Penerapan Diagram Kontrol *Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared* (MEWMS) pada Pengendalian Dispersi Kualitas Proses Produksi Air PDAM"(Nur et al., 2023).

B. Metodologi Penelitian

Uji Normalitas Multivariat

Terdapat beberapa prosedur yang diusulkan para ahli untuk menaksir normalitas multivariat. Salah satu prosedur tersebut adalah melakukan generalisasi dari uji normalitas berdasarkan pada *skewness* (kemiringan) dan *kurtosis* (keruncingan) yang dikenal dengan uji Mardia [4].

Hipotesis yang digunakan untuk menguji normal multivariat berdasarkan nilai *skewness* dan *kurtosis* adalah sebagai berikut:

H_0: Data berasal dari distribusi normal multivariat.

H_1: Data tidak berasal dari distribusi normal multivariat.

Statistik uji menggunakan uji Mardia untuk nilai *skewness* multivariat dapat dijelaskan dengan rumus sebagai berikut [5]:

$$z_1 = \frac{(p+1)(n+1)(n+3)}{6[(n+1)(p+1)-6]} b_{1,p}$$

dimana

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})^t \boldsymbol{S^{-1}} (\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}}))^3$$

merupakan *skewness* multivariat sampel. Mengunakan taraf nyata α, dengan kriteria uji terima H_0 jika $z_1 < \chi^2_{r,\alpha}$ dan nilai derajat bebasnya adalah $r = \frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$ atau nilai $p - value > \alpha$.

Lalu, untuk statistik uji *kurtosis* multivariat dapat dijelaskan dengan rumus sebagai berikut:

$$z_2 = \frac{b_{2,p} - p(p+2)(n+p+1)/n}{\sqrt{8p(p+2)/(n-1)}}$$

dimana

$$b_{2,p} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}((\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})^t \boldsymbol{S^{-1}} (\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})^2$$

merupakan *kurtosis* multivariat sampel. Mengunakan taraf nyata α, dengan kriteria uji terima H_0 jika $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z_2 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau $p - value > \alpha$.

Transformasi Data

Data yang didapat dari tahap pengumpulan data terkadang tidak dapat langsung memenuhi asumsi normalitas. Salah satu cara untuk mengatasi permasalahan tersebut adalah dengan melakukan transformasi data. Salah satu metode transformasi data ialah metode Transformasi *Johnson*. Metode Transformasi *Johnson* dapat digunakan untuk menstabilkan varians, membuat data ke bentuk normal, dan memperbaiki nilai *fit* dari model data yang diambil [6].

Transformasi *Johnson* memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$Z = \gamma + \delta f\left(\frac{X-\xi}{\lambda}\right)$$

dimana γ dan δ adalah parameter bentuk, λ parameter skala, dan ξ adalah parameter lokasi.

Transformasi lognormal yang digunakan dengan rumus sebagai berikut:

$$Z = \gamma + \delta \ln\left(\frac{X-\xi}{\lambda}\right), X > \xi$$

Transformasi *bounded system* yang digunakan dengan rumus sebagai berikut:

$$Z = \gamma + \delta \ln\left(\frac{X-\xi}{\xi-\lambda-X}\right), \xi < X < \xi + \lambda$$

Transformasi *unbounded system* yang digunakan dengan rumus sebagai berikut:

$$Z = \gamma + \delta \ln\left[\left(\frac{X-\xi}{\lambda}\right) + \left\{\left(\frac{X-\xi}{\lambda}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}}\right], -\infty < X < \infty$$

Diagram Kontrol *Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared* (MEWMS)

Prosedur penentuan batas kontrol dimulai dengan menentukan vektor acak baru melalui suatu transformasi $\boldsymbol{Z}$ yaitu sebagai berikut.

$$\boldsymbol{Z_t} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)$$

dengan vektor rata-rata dan variansi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}(\boldsymbol{\mu}_x - \boldsymbol{\mu}_0) \text{ dan } \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}$$

Akibatnya jika proses terkendali, maka $\mathbf{Z}_t \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$. Dimana $\mathbf{I}_p$ adalah matriks identitas $p \times p$. Dalam pembahasan selanjutnya, diagram yang akan diusulkan berdasarkan transformasi vektor acak $\mathbf{Z_t}$.

Untuk selanjutnya MEWMS didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{S_t} = \omega \mathbf{Z_t} \mathbf{Z_t^T} + (1-\omega)\mathbf{S_{t-1}}$$

dimana $0 < \omega < 1$ merupakan konstanta pemulusan dan $\mathbf{S}_0 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_1^T$. Setelah melalui beberapa penyederhanaan aljabar, matriks $\mathbf{S}_t$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$\mathbf{S_t} = \sum_{i=1}^{t} c_i \mathbf{Z_t} \mathbf{Z_t^T}$$

dimana

$$c_1 = (1-\omega)^{t-1}$$
$$c_i = \omega(1-\omega)^{t-i}, i = 2, \dots, t,$$

dan

$$\sum_{i=1}^{t} c_i = 1$$

Untuk mendeteksi kemungkinan perubahan dalam tr($\mathbf{\Sigma}$) kita miliki:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathbf{S}_t) &= \sum_{i=1}^{t} c_i \mathrm{tr}(\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t^T) \\ &= c_t \sum_{j=1}^{p} Z_{tj}^2 + c_{t-1}\, c_t \sum_{j=1}^{p} Z_{(t-1)j}^2 + \cdots + c_1 \sum_{j=1}^{p} Z_{1j}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{t} c_i \left(\sum_{j=1}^{p} Z_{ij}^2 \right) \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\mathrm{E}[\mathrm{tr}(\mathbf{S}_t)] = \sum_{i=1}^{t} c_i \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{p} Z_{ij}^2 \right) = p \sum_{i=1}^{t} c_i = p$$

dan

$$\mathrm{Var}[\mathrm{tr}(\mathbf{S}_t)] = \sum_{i=1}^{t} c_i^2 \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{p} Z_{ij}^2 \right) = 2p \sum_{i=1}^{t} c_i^2$$

dimana

$$\sum_{i=1}^{t} c_i^2 = \frac{\omega}{2-\omega} + \frac{2-2\omega}{2-\omega}(1-\omega)^{2(t-1)}$$

yang konvergen terhadap $\omega/(2-\omega)$ sebagai $t \to \infty$. Dengan demikian, batas-batas kendali untuk diagram kontrol yang diusulkan ditentukan oleh:

$$\mathrm{E}[\mathrm{tr}(\mathbf{S}_t)] \pm L\sqrt{\mathrm{Var}[\mathrm{tr}(\mathbf{S}_t)]} = p \pm L\sqrt{2p \sum_{i=1}^{t} c_i^2}$$

dimana *L* bergantung pada *p*, *ω*, dan ARL *in control* yang diinginkan (ARL_0).

Tabel 1. Nilai L yang disimulasikan untuk diagram kontrol MEWMS

ω \ p	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.1	2.7869	2.7634	2.7524	2.7426	2.7359	2.7307

0.5	3.939	3.8141	3.7195	3.6514	3.5927	3.5463
0.9	4.3135	4.1601	4.0422	3.9487	3.8766	3.8164
ω \ p	10	11	12	13	14	15
0.1	2.7236	2.7221	2.7235	2.7235	2.7225	2.7173
0.5	3.4983	3.4673	3.4162	3.4162	3.383	3.3579
0.9	3.7618	3.7191	3.6474	3.6474	3.6133	3.5859

Sumber: N.G.T. Gunaratne et al.

Pada penelitian ini akan menggunakan diagram kontrol MEWMS untuk mengendalikan dispersi proses pada produksi kualitas air mineral PDAM Hazora Kabupaten Jember. Data penelitian yang digunakan mulai pada tanggal 15 Juli 2017 hingga tanggal 23 september 2017 dengan data sebanyak 60 pengamatan. Berikut merupakan tahapan analisis yang dilakukan:

1. Mendeskripsikan masing-masing variabel berdasarkan ringkasan data.
2. Memeriksa asumsi normal multivariat, dilakukan pada seluruh variabel yang ada dengan uji Mardia. Jika tidak memenuhi asumsi lakukan transformasi *Johnson.*
3. Melakukan pengendalian dispersi proses dengan diagram kontrol MEWMS. Berikut merupakan langkah-langkah yang akan dikerjakan:
    a. Menentukan pembobot dan lebar batas kontrol L diagram kontrol MEWMS menurut Tabel 2.1 yakni dengan $p = 7$ dengan $\omega = 0{,}1; 0{,}5; 0{,}9$ maka, diperoleh nilai $L = 2{,}7426,\ L = 3{,}6514, L = 3{,}9487$.
    b. Lakukan penaksiran vektor rata-rata dengan Persamaan $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{X_i}$ dan matriks kovarians menggunakan Persamaan $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})^T$
    untuk unsuk baris ke-j, kolom ke-k dari matriks kovarian sampel berukuran $p \times p$ dengan Persamaan $\boldsymbol{\Sigma}_{jk} = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}(\boldsymbol{X}_{ij} - \overline{\boldsymbol{X_k}})(\boldsymbol{X}_{ik} - \overline{\boldsymbol{X_k}})^T; j = k = 1,2, \dots, p$
    c. Mentranformasi data hasil transformasi *Johnson* ke normal baku multivariat.
    Untuk $t = 1,2, \dots, 60$:
    d. Menghitung nilai $\mathbf{S_t}$.
    e. Menghitung nilai $\mathrm{tr}(\mathbf{S_t})$.
    f. Menghitung nilai $E(\mathrm{tr}(\mathbf{S_t}))$ dan $Var(\mathrm{tr}(\mathbf{S_t}))$
    g. Membuat batas-batas kontrol.
    h. Memplot nilai-nilai $\mathrm{tr}(\mathbf{S_t})$ pada diagram kontrol.
    i. Menyimpulkan proses.

    Jika terdapat nilai $\mathrm{tr}(\mathbf{S_t})$ yang *out of control*, maka hapus pengamatan yang *out of control* terlebih dahulu lalu lakukan kembali Langkah 1) sd 9), sampai semua nilai $\mathrm{tr}(\mathbf{S_t})$ *in control.*
4. Lakukan pengendalian dispersi proses dengan diagram kontrol MEWMS yang telah *in control* dengan membuat simulasi skenario sebagai berikut:
    a. Parameter vektor rata-rata μ_0 dan matriks kovarians Σ_0 diperoleh dari penaksiran $\hat{\mu}$ dan $\hat{\Sigma}$ berdasarkan data proses *in control*.
    b. Simulasi 1: Bangkitkan data multivariat sebanyak 50 dari $N_7(\mu_1, \Sigma_0)$, di mana empat variabel pertama rata-ratanya dinaikan (digeser) sebesar 1,25 Sigma karena ingin dilhat pergeseran kecil.
    c. Simulasi 2: Bangkitkan data multivariat sebanyak 100 dari $N_7(\mu_0, \Sigma_1)$, di mana empat variabel pertama matriks kovariansnya dinaikan (digeser) sebesar 100%.
    d. Menggabungkan 60 buah data aktual, 50 buah data simulasi 1, dan 100 buah data dari simulasi 2, sehingga total pengamatan menjadi 210.
    e. Buat diagram MEWMS seperti pada Langkah 3 untuk $t = 1,2, \dots, 210$.

f. Menyimpulkan proses.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Uji Normalitas Multivariat

Pengujian asumsi normalitas multivariat dilakukan menggunakan uji Mardia, dengan hipotesis sebagai berikut:
H_0: Data berdistribusi normal multivariat;
H_1: Data tidak berdistribusi normal multivariat.
dengan menggunakan *software* R Studio, maka didapatkan nilai statistik dan p-value dari masing-masing skewness dan kurtosis yang diringkas pada tabel berikut:

Tabel 2. Uji Normalitas Multivariat Sebelum Transformasi

Test	**Nilai Statistik**	***P-Value***
Mardia Skewness	907,2146	2,7628e-138
Mardia Kurtosis	23,3852	0

Berdasarkan Tabel 4.2 didapatkan nilai *p-value skewness* yaitu 2,7628e-138$< \alpha(0{,}05)$ dan untuk *p-value kurtosis* yaitu $0 < \alpha(0{,}05)$. Sehingga, H_0 ditolak yang berarti data tidak berdistribusi normal multivariat.

Oleh karena itu, selanjutnya akan dilakukan transformasi data dengan transformasi *Johnson* dengan *software* Minitab. Setelah dilakukan transformasi data, maka harus dilakukan kembali pengujian normal multivariat dengan hasil pada tabel berikut:

Tabel 3. Uji Normalitas Multivariat Setelah Transformasi

Test	**Nilai Statistik**	***P-Value***
Mardia Skewness	104.2476	0.0665
Mardia Kurtosis	-0.0874	0.9304

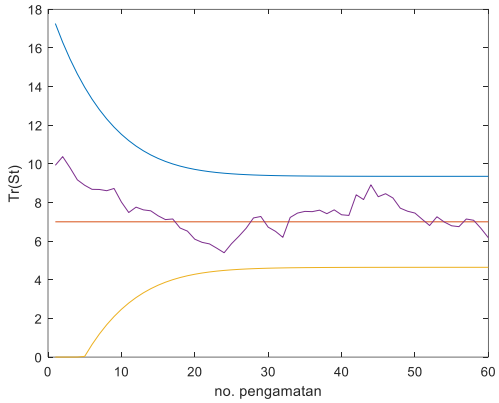
Berdasarkan Tabel 4.4 didapatkan nilai *p-value skewness* yaitu $0{,}0665 > \alpha(0{,}05)$ dan untuk *p-value kurtosis* yaitu $0{,}9304 > \alpha(0{,}05)$. Sehingga, H_0 diterima yang berarti data berdistribusi normal multivariat.

Diagram Kontrol MEWMS Data Aktual

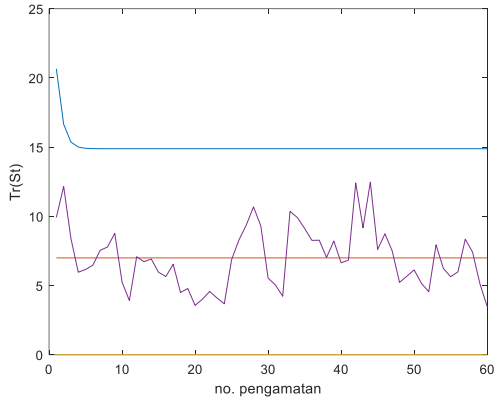
Estimasi vektor rata-rata ($\hat{\mu}$) dan matriks kovarians ($\hat{\Sigma}$) diperoleh dan digunakan untuk menetapkan batas kendali, berikut merupakan taksiran vektor rata-rata dan matriks kovarians masing-masing:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 0{,}1149 \\ 0{,}0425 \\ 0{,}1{,}230 \\ 0{,}3315 \\ 0{,}0401 \\ -0{,}0022 \\ 0{,}1226 \end{bmatrix} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0{,}7144 & -0{,}0187 & 0{,}0417 & -0{,}0167 & 0{,}1245 & -0{,}0104 & 0{,}1961 \\ -0{,}0187 & 0{,}9731 & 0{,}0579 & 0{,}0302 & 0{,}0221 & -0{,}0989 & 0{,}1250 \\ 0{,}0417 & 0{,}0579 & 1{,}0043 & 0{,}0224 & -0{,}0288 & -0{,}4073 & -0{,}0238 \\ -0{,}0167 & 0{,}0302 & 0{,}0224 & 0{,}0922 & 0{,}0181 & -0{,}0024 & -0{,}0319 \\ 0{,}1245 & 0{,}0221 & -0{,}0288 & 0{,}0181 & 0{,}6335 & -0{,}1859 & -0{,}2962 \\ -0{,}0104 & -0{,}0989 & -0{,}4073 & -0{,}0024 & -0{,}1859 & 1{,}0654 & 0{,}3383 \\ 0{,}1961 & 0{,}1250 & -0{,}0238 & -0{,}0319 & -0{,}2962 & 0{,}3383 & 1{,}0496 \end{pmatrix}$$

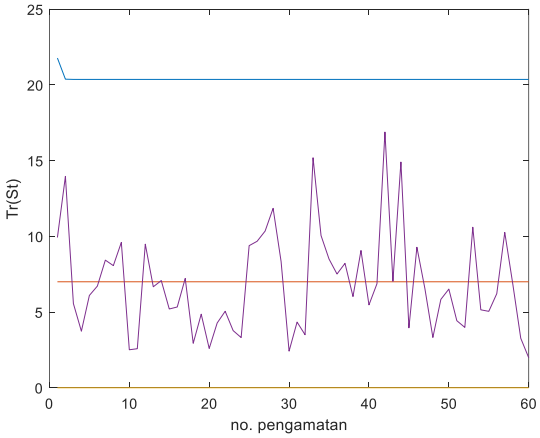
Data ditransformasikan ke normal baku multivariat lalu dibuat diagram kontrol MEWMS dengan nilai pembobot $\omega = 0{,}1; 0{,}5; 0{,}9$.



Gambar 1. Diagram MEWMS $\omega = 0{,}1$



Gambar 2. Diagram MEWMS $\omega = 0{,}5$



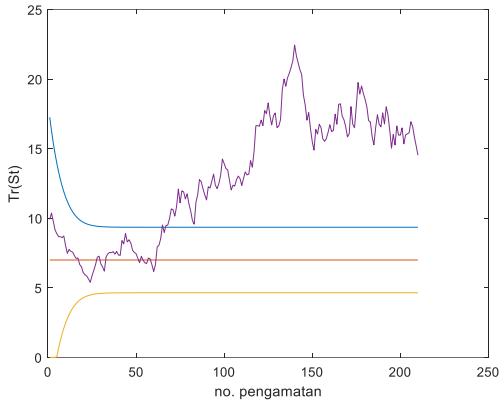
Gambar 3. Diagram MEWMS $\omega = 0{,}9$

Berdasarkan hasil Gambar 1,2, dan 3 dapat dilihat bahwa setiap data pengamatan berada dalam batas-batas kendali. Sehingga, diagram kontrol MEWMS dengan pembobot $\omega = 0{,}1$ dan L = 2,7426, $\omega = 0{,}5$ dan L = 3,6514, dan $\omega = 0{,}9$ dan L = 3,9487 dapat dikatakan *in control* atau terkendali.

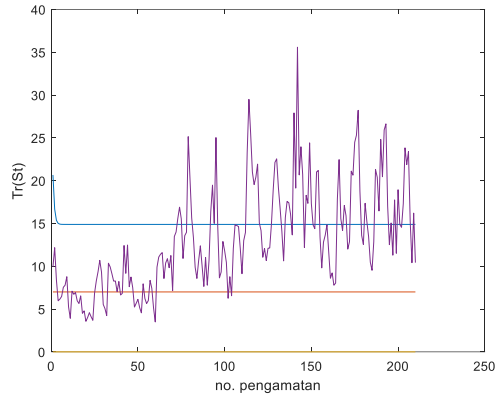
Diagram Kontrol MEWMS Data Simulasi

Kemudian akan dibangkitkan data multivariat sebanyak 50 dari $N_7(\mu_1, \Sigma_0)$, di mana empat variabel pertama rata-ratanya dinaikan (digeser) sebesar 1,25 Sigma dan bangkitkan data multivariat sebanyak 100 dari $N_7(\mu_0, \Sigma_1)$, di mana empat variabel pertama matriks kovariansnya dinaikan (digeser) sebesar 100% yang dapat dilihat sebagai berikut:

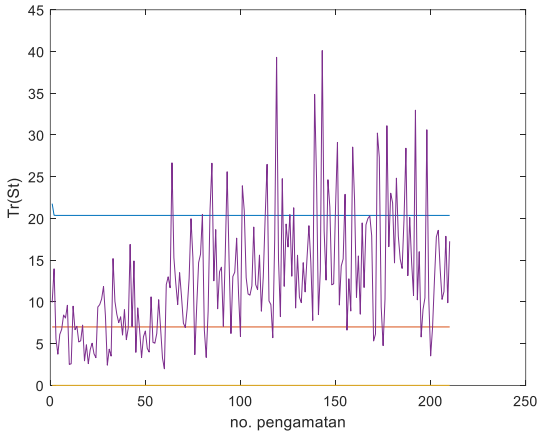
$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 1{,}1714 \\ 1{,}2756 \\ 1{,}3756 \\ 0{,}7110 \\ 0{,}0401 \\ -0{,}0022 \\ 0{,}1226 \end{bmatrix} \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1{,}4288 & -0{,}0187 & 0{,}0417 & -0{,}0167 & 0{,}1245 & -0{,}0104 & 0{,}1961 \\ -0{,}0187 & 1{,}9463 & 0{,}0579 & 0{,}0302 & 0{,}0221 & -0{,}0989 & 0{,}1250 \\ 0{,}0417 & 0{,}0579 & 2{,}0085 & 0{,}0224 & -0{,}0288 & -0{,}4073 & -0{,}0238 \\ -0{,}0167 & 0{,}0302 & 0{,}0224 & 0{,}1844 & 0{,}0181 & -0{,}0024 & -0{,}0319 \\ 0{,}1245 & 0{,}0221 & -0{,}0288 & 0{,}0181 & 0{,}6335 & -0{,}1859 & -0{,}2962 \\ -0{,}0104 & -0{,}0989 & -0{,}4073 & -0{,}0024 & -0{,}1859 & 1{,}0654 & 0{,}3383 \\ 0{,}1961 & 0{,}1250 & -0{,}0238 & -0{,}0319 & -0{,}2962 & 0{,}3383 & 1{,}0496 \end{pmatrix}$$



Gambar 4. Diagram MEWMS $\omega = 0{,}1$



Gambar 5. Diagram MEWMS $\omega = 0{,}5$



Gambar 6. Diagram MEWMS $\omega = 0{,}9$

Berdasarkan pada Gambar 4 terlihat diagram kontrol MEWMS dapat disimpulkan bahwa diagram pada $\omega = 0{,}1$ mendeteksi adanya pergeseran rata-rata mulai dari data pengamatan ke-61 sampai dengan 114. Selanjutnya, untuk pengamatan ke-115 sampai 210 diagram mendeteksi adanya pergeseran dispersi. Berdasarkan pada Gambar 5 dapat disimpulkan bahwa diagram pada $\omega = 0{,}5$ mendeteksi adanya pergeseran rata-rata mulai dari data pengamatan ke-73 sampai dengan 115. Selanjutnya, untuk pengamatan ke-116 sampai 210 diagram mendeteksi adanya pergeseran dispersi. Berdasarkan pada Gambar 6 dapat disimpulkan bahwa diagram pada $\omega = 0{,}9$ mendeteksi adanya pergeseran rata-rata mulai dari data pengamatan ke-74 sampai dengan 117. Selanjutnya, untuk pengamatan ke-118 sampai 210 diagram mendeteksi adanya pergeseran dispersi.

Berikut merupakan tabel ringkasan data pengamatan *out of control* pada diagram kontrol MEWMS dengan simulasi yang dilakukan agar dapat melihat pergeseran rata-rata dan dispersinya menggunakan 210 pengamatan.

Tabel 2. Ringkasan Data Out of Control

ω	Pergeseran Rata-Rata (μ_1)	Pergeseran Dispersi (Σ_1)
0,1	61	115
O,5	75	116
0,9	74	118

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

Setelah menerapkan diagram kontrol *Multivariate Exponentially Weighted Mean Squared* (MEWMS) pada data karakteristik kualitas air mineral PDAM Hazora Kabupaten Jember periode 15 Juli 2017 hingga 23 september 2017, diagram kontrol yang dihasilkan menunjukkan bahwa proses *in control* atau terkendali pada pembobot $\omega = 0{,}1;\ 0{,}5; 0{,}9$.

Lalu, untuk hasil simulasi berdasarkan pada parameter vektor rata-rata dan matriks kovarians data *in control* atau terkendali, menunjukkan bahwa diagram kontrol MEWMS selain dapat memberi sinyal pada pergeseran dispersi multivariat juga dapat memberi sinyal *out of control* jika vektor rata-rata bergeser. Dan diagram yang mendeteksi pergeseran vektor rata-rata dan dispersi yang paling cepat yaitu terdapat pada diagram kontrol MEWMS dengan pembobot $\omega = 0{,}1$, dapat dilihat dari pergeseran yang terdeteksi terdapat pada pengamatan ke-61 untuk

vektor rata-rata dan 115 untuk dispersinya.

Acknowledge
Penelitian ini dapat terlaksana dengan baik atas bantuan, bimbingan, saran dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, peneliti mengucapkan terima kasih kepada Yang Maha Kuasa Allah SWT atas Rahmat dan Hidayah-Nya, kedua orang tua serta keluarga yang selalu mendoakan dan memberi semangat, Bapak Dr. Suwanda, M.S selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bantuan wawasan, pengetahuan, ilmu, serta motivasi, para dosen Statistika Unisba yang telah memberikan ilmu pengetahuannya, dan teman-teman yang telah memberikan kritikan, bantuan, dan semangatnya.

Daftar Pustaka

[1] L. Huwang, A. B. Yeh dan C. W. Wu, “Monitoring Multivariate Process Variability for Individual Observations,” *Journal of Quality Technology*, vol. 39(3), pp. 259-262, 2007.

[2] D. C. Montgomery, ". Introduction to Statistical Quality Control (7th Edition) (Vol.53)," *Arizona: Wiley*, 2013.

[3] D. C. Montgomery, Introduction to Statistical Quality Control 6th Edition, United States of America: John Wiley And Sons, Inc. Danvers, 2009.

[4] Rencher, "Methods of Multivariate Analysis Third Edition," *John Wiley & Sons, Inc*, 2002.

[5] D. Wulandari, Sutrisno and M. B. Nirwana, "Mardia’s Skewness and Kurtosis for Assessing Normality Assumption in Multivariate Regression," *ENTHUSIASTIC International Journal of Statistics and Data Science*, 2021.

[6] F. George, "Johnson's System of Distribution and Microarray Analysis," *University of South Florida*, 2007.

[7] K. V. Mardia, "Multivariate Analysis," *Academic Press*, 1979.

[8] Johnson and Winchern, "Applied Multivariate Statistical," *Prentice Hall*, 2007.

[9] Mukminin, A., Kudus, A., Statistika, P., Matematika, F., Ilmu, D., & Alam, P. (n.d.). *Bandung Conference Series: Statistics Selang Kepercayaan Bootstrap Parametrik untuk Perbedaan Signal to Noise Ratio dari Distribusi Eksponensial Dua Parameter pada Data Waktu Kegagalan Laminasi Mylar-Poliuretana*. https://doi.org/10.29313/bcss.v3i2.7672

[10] Nur, F., 1∗, A., & Achmad, A. I. (2023). *Perbandingan Fuzzy C-Means Clustering dan Fuzzy Possibilistic C-Means Clustering dalam Pengelompokan Kabupaten/Kota di Jawa Barat Berdasarkan Akses terhadap Sumber Air dan Sanitasi Layak Pada Tahun 2020*. *1*(1), 27–34. https://doi.org/10.29313/datamath.v1i1.16

[11] Zakiyatis Salmaini, & Suliadi. (2021). SPC (Statistical Process Control) Fase II Diagram Kendali Cusum (Cumulative Sum) Nonparametrik Berdasarkan Statistik Mann-Whitney Pada Data Harga Saham PT NO. *Jurnal Riset Statistika*, *1*(2), 83–91. https://doi.org/10.29313/jrs.v1i2.404